

# Kurt Gödel: Los teoremas de incompletud y la demostración incompleta\*

**Dr. Juan Pedro Viqueira**  
Centro de Estudios Históricos  
El Colegio de México

Al igual que Copérnico, Darwin y los primeros teóricos de la física cuántica, Kurt Gödel asestó un golpe mortal a las pretensiones de la humanidad por colocarse en un lugar aparte (y obviamente superior) con respecto al resto del universo. Copérnico, al demostrar que era la Tierra la que giraba alrededor del Sol —y no lo contrario, como se pensaba en sus tiempos— puso fin a la creencia de que habitamos el centro del cosmos y abrió las puertas para que más adelante los astrónomos llegaran a la conclusión de que nos encontramos en la periferia de la Vía Láctea, una galaxia entre otras muchas, en un rincón perdido del universo conocido.

Darwin, a su vez, demostró que los seres humanos no éramos sino una especie más entre millones que pueblan la tierra (la inmensa mayoría de ellas son bacterias), todas descendientes de un mismo y único antepasado, y que nuestros parientes más próximos conforman con nosotros la familia de los primates. La teoría de Darwin era tan revolucionaria que casi ningún contemporáneo la comprendió

---

\* Publicado bajo el título, "La imperfección matemática del mundo, y luego: Trump", en *Nexos*, 474, Junio 2017, pp. 20-23.

cabalmente, razón por la cual muchos se apresuraron a interpretarla a partir de la idea de progreso: la evolución —un término que Darwin prácticamente nunca utilizó— de las especies seguiría una dirección ascendente, de lo más simple (las bacterias) a lo más complejo (los seres humanos), permitiéndonos así seguir ocupando la cima de la creación. Sin embargo, la teoría de Darwin se limita a explicar que los individuos de cualquier especie que cuenten con alguna característica hereditaria que resulte favorable a su supervivencia en un medio ambiente particular dejan una prole más abundante. De esa forma, aquella ventajosa variación individual se vuelve cada vez más común hasta dar lugar a una nueva especie. Así, los mamuts estaban mejor adaptado a los climas fríos, mientras que los elefantes lo están a los climas cálidos; pero ninguna de las dos especies es "mejor" o "más evolucionada" que la otra. La especie madre de toda la vida terrestre no evolucionó hasta llegar al ser humano, sino que dio lugar a millones de especies diferentes, casi todas unicelulares, que no han dejado de transformarse para adaptarse al medio y a sus cambios, a veces repentinos. Así las bacterias siguen mutando constantemente, entre otras cosas para sobrevivir a los antibióticos. Los animales no son más que una pequeñísima rama en el árbol de la evolución, un accidente estadísticamente poco relevante en la tendencia general que rige a las especies, que consiste en transformarse sin volverse más complejas.<sup>1</sup>

La mecánica cuántica, a su vez, destruyó la idea de una armonía preestablecida entre nuestras categorías mentales y los principios que rigen al universo. Si antes se pensaba que el papel del científico era "descubrir" las leyes naturales, la física cuántica hizo evidente la inadecuación entre nuestros conceptos y

---

<sup>1</sup> Véase al respecto, Stephen Jay Gould, *La grandeza de la vida: la expansión de la excelencia de Platón a Darwin*, Barcelona, Crítica, 2001.

los resultados experimentales con las partículas elementales. La dualidad onda-partícula de fotones, electrones, protones y otros pulverizó toda esperanza de utilizar las categorías habituales de pensamiento. Lo más que pueden hacer los físicos es crear modelos matemáticos —siempre provisionales y parciales— que den cuenta de los resultados experimentales.<sup>2</sup> Pero para ello, tuvieron que abandonar el concepto de causalidad y trastornar por completo la idea de tiempo y espacio. En efecto, en los fenómenos cuánticos, el espacio y el tiempo se complican tanto que no es posible definir anterioridad y posterioridad, y por lo tanto no se puede hablar de causalidad.<sup>3</sup> De hecho, los modelos de la física cuántica son tan sólo probabilísticos.

Más recientemente, la comprobación de que en ciertas condiciones experimentales las llamadas "desigualdades de Bell" no se producían arrojaron la desconcertante interpretación de que un único objeto cuántico podía ocupar simultáneamente dos lugares distantes o, si se prefiere una formulación menos provocadora, que la mecánica cuántica no es una teoría local.<sup>4</sup> Decimos que se trata de una interpretación desconcertante, sólo porque no logramos deshacernos de la idea de espacio y tiempo que nos legó la física clásica de Galileo y Newton. Pero lo más grave es que la mecánica cuántica también puso fin a la creencia de una ciencia objetiva. Las condiciones de observación de un fenómeno forman parte de éste. No es sólo que la observación perturbe al fenómeno, sino que, en forma más profunda, la observación crea el fenómeno observado.<sup>5</sup>

---

<sup>2</sup> Robert H. March, *Física para poetas*, México, Siglo XXI, 1977.

<sup>3</sup> Werner Heisenberg, "Física atómica y ley causal" en *La imagen de la naturaleza en la física actual*, Barcelona, Planeta-Agostini, 1993.

<sup>4</sup> Iraj Nikseresht, *Physique quantique. Origines, interprétations et critiques*, París, Ellipses, 2016, pp. 230-238.

<sup>5</sup> Véase la detallada explicación del famoso experimento de los dos agujeros en Richard P. Feynman, "Probabilidad e incertidumbre. La visión de la naturaleza a través de la mecánica cuántica", en *El carácter de la ley física*, Barcelona, Tusquets, 2000.

Afortunadamente, nos quedaban las matemáticas para convencernos de que al menos somos capaces de hablar el lenguaje de la Naturaleza, el que permite describir a ésta con todo rigor y precisión. Pero, ¿esto es realmente así? ¿Las matemáticas se refieren al mundo natural? Desde tiempos de la Antigüedad griega, los matemáticos así lo pensaban.<sup>6</sup> Pero esta certeza se vino abajo cuando en el siglo XIX, los matemáticos se propusieron demostrar el quinto postulado de Euclides. Euclides había propuesto diez postulados que le parecían evidentes, a partir de los cuales se podían derivar lógicamente todos los teoremas de la geometría. Sin embargo, muchos matemáticos pensaban que el quinto postulado —en su versión moderna: "por un punto exterior a una recta se puede trazar una (y sólo una) paralela a dicha recta"— era innecesario y podía demostrarse a partir de los otros nueve. Como los intentos clásicos habían fracasado, tres matemáticos — Lobachevsky, Bolyai y Riemann— intentaron a principios del siglo XIX una demostración por el absurdo: si se remplazaba el quinto postulado de Euclides por algún otro —"por un punto exterior a una recta se pueden trazar por lo menos dos paralelas a dicha recta" o bien "por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela a dicha recta"— y se empezaran a derivar teoremas de los axiomas así modificados, se tendría que llegar en algún momento a una contradicción lógica que demostrara la imposibilidad de las versiones alternas del quinto postulado de Euclides. Sin embargo, no se llegó a ninguna contradicción. Surgieron, así, nuevas geometrías no euclidianas perfectamente coherentes y consistentes. Pero entonces, ¿cuál era la verdadera? Algunos filósofos y matemáticos no tardaron en desechar la pregunta misma. Así, Poincaré afirmó de manera contundente que los axiomas de las

---

<sup>6</sup> Estos apartados relativos a la historia de las matemáticas están basados principalmente en el bello y ameno libro de Marco Livio, *¿Es Dios un matemático?*, Barcelona, Ariel, 2011.

geometrías no eran ni juicios sintéticos a priori (categorías universales del entendimiento, según Kant) ni hechos experimentales, sino simplemente convenciones. Las matemáticas no eran la lengua de la Naturaleza (o la de Dios), sino tan sólo una invención humana, aunque ciertamente muy útil y poderosa.

Ante este cataclismo epistemológico, los matemáticos reaccionaron reorientando su trabajo: si las matemáticas eran tan sólo un lenguaje inventado, se podría por lo menos construir un sistema único todavía más abstracto en el que, con un número limitado de axiomas y con unas reglas claras y precisas, se pudieran reagrupar todas las ramas de las matemáticas. Sería, así, el lenguaje único del pensamiento humano y sería capaz de describir cualquier fenómeno de la naturaleza. Las nuevas matemáticas serían, pues, infalibles.

Fueron estas pretensiones exorbitantes de la razón humana las que perecieron bajo los certeros golpes de Kurt Gödel. Este genio de la lógica y de las matemáticas y, a la vez un profundo filósofo, demostró en 1931 que tal sistema era imposible de construir. En su primer teorema, probó que en cualquier sistema matemático mínimamente complejo (es decir capaz de demostrar los teoremas básicos de la aritmética) y que fuera coherente o consistente (es decir que no admitiese contradicciones), siempre es posible formular una afirmación "indecidible", es decir que no se puede afirmar que sea falsa ni verdadera. Para poder decidir sobre su verdad o falsedad, es necesario postular un nuevo axioma construido ex profeso para zanjar la cuestión. Más aún, si el nuevo axioma que resuelve en un sentido dado la cuestión es coherente con el sistema matemático, el axioma opuesto también lo será. Esto significa que es posible construir una infinidad de sistemas matemáticos todos consistentes, pero siempre incompletos. El segundo teorema de incompletud remachaba el clavo en el ataúd del proyecto unificador de las

matemáticas: La coherencia de un sistema matemático mínimamente complejo no se puede demostrar al interior de ese sistema.

Kurt Gödel era un espíritu obsesivo al grado máximo. Al final de su vida, sufrió de delirio de persecución: convencido de que intentaban envenenarlo, sólo aceptaba comer los guisos que le preparaba su mujer. Pero cuando ésta tuvo que ser hospitalizada, lógicamente Gödel dejó de alimentarse hasta perecer de hambre. Tal vez sus temores eran menos infundados de lo que se suele pensar. Gödel tuvo que refugiarse en 1940 en Princeton huyendo de la persecución nazi. Además, sin duda Gödel debía conocer la leyenda de que el primer griego que demostró que la raíz cuadrada de dos era un número irracional (es decir que no puede ser representado por un quebrado) fue arrojado al mar desde el barco en el que viajaba por los seguidores de Pitágoras. Si tal había sido la suerte de aquel infeliz, ¿que no le podía suceder a alguien como él que había asestado un golpe mortal a la autosuficiencia de las matemáticas?

Una graciosa anécdota, transmitida por Oskar Morgenstern (inventor junto con John von Neumann de la teoría de juegos) pinta a Gödel de cuerpo entero. Hoy en día, tras la elección de Trump, dicha anécdota ha adquirido un cariz preocupante. He aquí el relato de Morgenstern:

Borrador

### **Memorándum de matemática**

Fecha: 13 de septiembre de 1971

Para:

De: O. Morgenstern

Asunto: Historia de la naturalización de Kurt Gödel

Lo siguiente ha sido dictado exclusivamente con base en mi memoria sin consultar mis notas o diarios. Las fechas concretas y otros detalles serán añadidos en otra oportunidad.

Fue en 1946 cuando Gödel tuvo la oportunidad de volverse ciudadano norteamericano. Me pidió ser su testigo y propuso, como el otro testigo, a Albert Einstein, quien también aceptó gustoso. Einstein y yo nos vimos de vez en cuando, llenos de expectación sobre lo que ocurriría durante el tiempo previo a los procedimientos de naturalización e incluso durante éstos.

Gödel, a quien por supuesto vi una y otra vez en los meses previos a este acontecimiento, empezó a prepararse exhaustivamente para el examen. Siendo una persona muy minuciosa, empezó por informarse sobre la historia del poblamiento de Norteamérica. Ello le llevó gradualmente al estudio de la historia de los indígenas norteamericanos, de sus diversas tribus, etc. Me llamó muchas veces por teléfono en busca de material de lectura, el cual estudiaba diligentemente. Fueron muchas las preguntas que gradualmente se le fueron planteando y, por supuesto, muchas las complejas interrogantes acerca de la veracidad de estas historias y sobre las peculiares circunstancias que revelaban. De allí, gradualmente, Gödel procedió durante las semanas siguientes al estudio de la historia norteamericana, concentrándose, en particular, en los temas de derecho constitucional. Ello lo llevó, a su vez, al estudio de Princeton y a pedirme que le especificara dónde estaban los límites que separan al municipio de la ciudad. Traté de explicar que todo esto era totalmente innecesario, pero obviamente fue en vano. Él persistió en la búsqueda de todos los datos que quería conocer, de manera que le proporcioné también la información pertinente acerca de Princeton. Entonces quiso saber como se elegía al

Consejo Municipal, al Consejo de la Ciudad, y quién era el alcalde, y cómo funcionaba el Consejo de la Ciudad. Pensaba que le podrían hacer preguntas sobre estos asuntos. Si él llegara a mostrar su falta de conocimientos sobre el lugar en el que vivía, eso podría causar una mala impresión.

Le traté de convencer de que nunca se hacían preguntas de ese tipo, de que la mayoría de las preguntas eran totalmente formales y de que él las respondería fácilmente; lo más que le podrían llegar a preguntar sería sobre la forma de gobierno que tenemos en este país o como se llama la corte más alta y preguntas de este tipo. Sin embargo, él continuó con el estudio de la constitución.

Se produjo entonces un curioso acontecimiento. Bastante excitado, Gödel me dijo que, al estudiar la constitución, había descubierto, angustiosamente, ciertas contradicciones internas y que era capaz de demostrar cómo, en una forma perfectamente legal, era posible que alguien se convirtiera en un dictador y estableciera un régimen fascista, algo que nunca habían pretendido quienes habían redactado la constitución. Le respondí que era de lo más improbable que esos acontecimientos llegaran a ocurrir, incluso dando por supuesto que tuviera la razón, de lo cual, por supuesto, tenía mis dudas. Pero él persistía y fue así que tuvimos muchas conversaciones sobre este punto en particular. Intenté persuadirlo de que evitara tocar estos asuntos durante su examen ante la corte en Trenton y también le conté a Einstein acerca del esto. Éste se quedó horrorizado de que tal idea se le hubiese ocurrido a Gödel y también le dijo que no se preocupara por esas cuestiones, ni discutiera el asunto.

Pasaron muchos meses y finalmente llegó el día del examen en Trenton. Ese día recogí a Gödel en mi automóvil. Se sentó en la parte trasera y fuimos por Einstein a su casa en la calle Mercer y de allí manejamos a Trenton. Mientras



manejábamos, Einstein se volvió hacia Gödel y le dijo: "Vamos a ver, ¿estás realmente bien preparado para este examen?" Este comentario obviamente alteró a Gödel, lo que era exactamente el propósito de Einstein, quien se divertía muchísimo viendo la cara de preocupación de Gödel. [Nota a mano en el margen: Discusión de Einstein sobre por qué Rusia adoptó la religión ortodoxa griega, no la católica romana]. Cuando llegamos a Trenton, nos llevaron a un gran cuarto y, si bien usualmente se interroga por separado a los testigos y al candidato, debido a la presencia de Einstein, se hizo una excepción, y los tres fuimos invitados a sentarnos juntos: Gödel en el centro. El examinador primero le preguntó a Einstein y después a mí si en nuestra opinión Gödel sería un buen ciudadano. Le aseguramos que indudablemente así sería, que se trataba de un hombre distinguido, etc.

Entonces se volteó hacia Gödel y le dijo "Bueno, Sr. Gödel ¿De dónde viene usted?"

Gödel: "¿De dónde vengo? De Austria".

El examinador: "¿Qué tipo de gobierno tiene Austria?"

Gödel: "Era una república, pero la constitución estaba redactada de tal forma que finalmente se transformó en una dictadura".

El examinador: "¡OH! Eso está muy mal. Eso no podría pasar en este país".

Gödel: "Sí podría suceder, y se lo puedo demostrar".

Así, de entre todas las preguntas posibles, el examinador le hizo sólo aquella crucial. Einstein y yo estuvimos aterrados todo el tiempo que duró esta conversación. El examinador fue lo suficientemente inteligente como para rápidamente calmar a Gödel y decirle: "Dios mío, no entremos en esto" y dio por terminado el examen en ese momento, para nuestro enorme sosiego. Por fin nos fuimos, y, cuando íbamos de salida hacia las escaleras, un hombre se acercó corriendo con un pedazo de papel y

una pluma, se dirigió a Einstein y le pidió su autógrafo. Einstein accedió. Bajamos por el elevador, me volví hacia Einstein y le dije: "Debe ser horrible ser perseguido de esa manera por tantas personas". Einstein me respondió: "Sabes, es tan sólo la última supervivencia del canibalismo". Me picó la curiosidad y le pregunté: "¿Cómo es eso?". Él me respondió: "Sí, antes querían tu sangre, ahora quieren tu tinta".

Entonces nos fuimos, manejamos de vuelta a Princeton y cuando nos acercamos a la esquina de la calle Mercer, le pregunté a Einstein si quería ir al Instituto o a su casa. Él me respondió: "Llévame a la casa, mi trabajo ya no vale nada de todas maneras". Entonces citó una canción política norteamericana. Desafortunadamente no recuerdo las palabras, puede que las tenga en mis notas y ciertamente la reconocería si alguien pronunciara aquella frase en particular. Entonces de vuelta hacia la casa de Einstein, éste se volvió hacia atrás una vez más y dijo: "Gödel, éste fue tu penúltimo examen". Gödel: "¿Dios mío, todavía hay otro?" y empezó a angustiarse. Entonces Einstein le respondió: "Gödel, el próximo examen será cuando tengas un pie en la tumba". Gödel: "Pero, Einstein, nunca voy a caminar sobre mi tumba". Y entonces Einstein le respondió: "Gödel ¡Se trata tan sólo de un chiste!", y con eso nos despedimos. Llevé a Gödel a su casa. Todos estábamos aliviados por la conclusión de este extraordinario asunto. Ahora la mente de Gödel quedaba libre para dedicarse de nuevo a los problemas de filosofía y de lógica.

[Traducido del inglés por Ángel Palerm Viqueira].

La prudencia del examinador impidió que Gödel pudiese desarrollar su demostración en público, quedando así incompleta. Esperemos por el bien de todos que Trump no nos haga una demostración práctica de que es posible, sin violar la constitución norteamericana, convertir a los EE.UU. en un régimen fascista.